Den stora matteduellen 10 april 2014

Lag Sverige mot Brummer & Partners

1. Finn alla reella tal a, sådana att ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x^2 - 2y - 2z &= a \\ y^2 - 2z - 2x &= a \\ z^2 - 2x - 2y &= a \end{aligned}$$

har minst en reell lösning.

2. Finn alla reella tal a, sådana att ekvationen

$$|x^2 + x - 2| = ax + 2$$

har exakt tre reella lösningar.

3. Talet x bildas genom att man på ett godtyckligt sätt blandar siffrorna i 111 exemplar av talet 2014. Visa att x inte är kvadraten till något heltal.

4. Bisektriserna till vinklarna vid A och B i parallellogrammen $ABCD$ skär varandra i punkten E, som ligger på sidan CD. Om AC skär BE i punkten K, bestäm kvoten $\frac{BK}{KE}$.

5. Mittpunktsnormalen till bisektrisen för vinkeln vid hörnet A i triangeln ABC skär sidan AC i dess mittpunkt. Visa att triangeln ABC är likbent.

6. Är det sant att bisektrisen till vinkeln från ett hörn i en triangel alltid ligger mellan höjden och medianen från samma hörn? Om ja, bevisa påståendet. Om nej, ge ett motexempel.

7. Medianerna AM och BN i triangeln ABC är 6 respektive 9 längdenheter långa. De skär varandra i punkten K, och vinkeln AKB är 30 grader. Bestäm triangelns area.

8. Givet är tetraedern $ABCD$ sådan att om man klipper upp längs kanterna DA, DB, DC och viker ner (utan överlapp) alla sidor till ABC:s plan, så fås en kvadrat med sidan a. Bestäm tetraederns volym.

9. Är det sant att höjderna i en tetraeder skär varandra i en punkt?

10. Finns det en polyeder vars alla sidor är trianglar och som är sådan att varje kant är axel för en trubbig vinkel som är vinkel i en av polyederns sidor? Om ja, beskriv en sådan. Om nej, motivera varför inte.